DIE ISOPERIMETRISCHE UNGLEICHUNG

MAIN MATH CHALLENGE, 27. SEPTEMBER 2025

SKRIPT ZUR CREATIVE CHALLENGE

DR. TOBIAS KÖNIG, GOETHE-UNIVERSITÄT FRANKFURT

Dieses Skript kann zusammen mit dem zugehörigen Vorlesungsvideo (erreichbar über den QR-Code in der Ecke oben rechts) als Vorbereitung auf die Creative Challenge genutzt werden. Die Aufgabe, die bei der Creative Challenge gestellt wird, ist nicht Teil dieses Skripts, sondern wird erst am Tag der Main Math Challenge veröffentlicht. Eine optimale Vorbereitung besteht darin, das Skript durchzuarbeiten und so gut wie möglich zu verstehen (dabei hilft das Video), sowie die im Skript enthaltenen Übungsaufgaben zu bearbeiten.

Der letzte Teil des Skripts, Abschnitte 5 und 6, ist als Bonusmaterial für die Vorbereitung auf die Creative Challenge nicht zwingend notwendig, aber hoffentlich dennoch interessant. Viel Spaß! :-)

Titelbild: *Landkauf der Dido*, Matthäus Merian d. Ä., *Historische Chronica Frankfurt*, 1630. Wikimedia Commons, `https://de.wikipedia.org/wiki/Dido_(Mythologie)#/media/Datei:Dido_purchases_Land_for_the_Foundation_of_Carthage.jpg`, abgerufen am 18. August 2025.

1. Didos isoperimetrisches Problem

In diesem Skript wollen wir eine mathematisch präzise Antwort auf die folgende jahrtausendealte Frage erarbeiten: Wie umschließt man mit einem Faden der Länge L die größte Fläche? Etwas mathematischer ausgedrückt:

Unter allen zusammenhängenden Teilmengen der Ebene, deren Randlänge L beträgt, welche hat den größten Flächeninhalt?

Diese Fragestellung wird oft als *isoperimetrisches Problem* bezeichnet (von griechisch *isos*=gleich, *perimetros*= Umfang).

Der Legende nach geht diese Frage und ihre Lösung auf die antike Phönizierkönigin Dido zurück, die mit einigen Getreuen aus ihrer Heimat geflohen war. An der Küste Nordafrikas gelandet bat sie in scheinbarer Bescheidenheit den dort ansässigen Herrscher um ein kleines Stück Land für sich und ihre Gefolgschaft, "nicht mehr als eine Ochsenhaut umspannen kann". Als ihr diese Bitte gewährt wurde, schnitt die gerissene Dido die ganze Ochsenhaut in einen einzigen dünnen Streifen und umspannte damit ein stattliches Gebiet, auf dem sie die Stadt Karthago gründete!

In welcher Form sollte aber Dido den Streifen Ochsenhaut auslegen, um die maximale Fläche zu umspannen? Die richtige Antwort lässt sich durch etwas Probieren und Intuition leicht erraten und war bereits in der Antike bekannt: *als Kreis*.

2. Kurven in der Ebene und die isoperimetrische Ungleichung

Um das isoperimetrische Problem mathematisch präzise formulieren und untersuchen zu können, benötigen wir folgende wichtige Definition.

Definition 1. *Eine* einfache, geschlossene Kurve in der Ebene *(oder kurz:* Kurve*) ist eine Abbildung*

$$\begin{aligned}\gamma : [0,1] &\to \mathbb{R}^2,\\ t &\mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))\end{aligned}$$

mit folgenden Eigenschaften:

(a) Die Koordinaten $x(t)$ und $y(t)$ der Kurve γ sind stetige Funktionen von $t \in [0,1]$.

(b) $\gamma(0) = \gamma(1)$.

(c) Für alle $s, t \in [0,1)$ mit $s \neq t$ gilt $\gamma(s) \neq \gamma(t)$.

Eigenschaft (b) bedeutet anschaulich, dass die Kurve γ wieder zu ihrem Ausgangspunkt zurückkehrt, also *geschlossen* ist. Eigenschaft (c) gewährleistet, dass die Kurve γ sich nicht unterwegs selbst schneidet (oder auch nur tangiert), also *einfach* ist. Abbildung 1 unten veranschaulicht dies.

Kurven γ, die diese beiden Eigenschaften erfüllen, schließen also ein (und nur ein) zusammenhängendes Flächenstück der Ebene ein. Wir identifizieren im Folgenden immer die Kurve

ABBILDUNG 1. Drei Beispiele für stetige Abbildungen von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}^2$. Die erste erfüllt Definition 1. Die zweite erfüllt nicht (b), die dritte nicht (c).

γ mit der durch sie eingeschlossenen Fläche und schreiben sowohl $A(\gamma)$ für den Flächeninhalt dieser Fläche als auch $L(\gamma)$ für die Randlänge der Kurve γ (also genauer gesagt der Bildmenge $\gamma([0,1])$ aufgefasst als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$).

Der folgende Satz ist das Hauptresultat dieser Vorlesung. Er liefert eine mathematisch präzise Lösung des isoperimetrischen Problems.

Isoperimetrische Ungleichung

Satz 2. *Sei γ eine einfache, geschlossene Kurve. Sei $L(\gamma)$ die Länge der Kurve γ und $A(\gamma)$ die von γ eingeschlossene Fläche. Dann gilt die* isoperimetrische Ungleichung

$$A(\gamma) \leq \frac{1}{4\pi} L(\gamma)^2.$$

Hier gilt Gleichheit genau dann, wenn γ eine Kreislinie ist.

In der Tat gilt, wenn γ_r einen beliebigen Kreis mit Radius $r > 0$ beschreibt:

$$A(\gamma_r) = r^2\pi = \frac{1}{4\pi}(2\pi r)^2 = \frac{1}{4\pi} L(\gamma_r)^2.$$

Insbesondere ist $\frac{A(\gamma)}{L(\gamma)^2} = \frac{1}{4\pi}$ für *jede* Kreislinie γ! Dies ergibt Sinn: Wie "gut" eine Kurve γ für unser isoperimetrisches Problem ist, sollte von ihrer Form abhängen, aber nicht von ihrer Größe oder ihrer Lage in der Ebene.

Bemerkungen 3. Zum Abschluss dieses einleitenden Abschnitts hier zwei Randbemerkungen für aufmerksame und/oder misstrauische LeserInnen:

(i) Wir haben an dieser Stelle keine mathematisch rigorose Definition von $A(\gamma)$ und $L(\gamma)$ gegeben, da diese für die folgenden geometrischen Argumente nicht wesentlich ist. Eine solche Definition existiert aber selbstverständlich. Wir führen sie weiter unten (zumindest für differenzierbare Kurven γ) in Abschnitt 6 ein.

(ii) Kurven, die Definition 1 erfüllen, können trotz ihrer "schönen" Eigenschaften (a)–(c) sehr unübersichtlich sein. Man kann sich deshalb mit Recht fragen, ob man für jede solche Kurve γ stets ein eindeutiges von γ eingeschlossenes Flächenstück identifizieren kann, wie oben behauptet. Dass dies in der Tat stets zutrifft, ist ein überraschend tiefes mathematisches Resultat, das als *Jordanscher Kurvensatz* bekannt ist.

3. Warm-up: Das isoperimetrische Problem für Dreiecke

Zum Aufwärmen wollen wir das isoperimetrische Problem für einen interessanten Spezialfall lösen, nämlich für die Klasse der Dreiecke.

Satz 4 (Isoperimetrische Ungleichung für Dreiecke)**.** *Sei γ eine Kurve der Länge $L(\gamma)$, die Definition 1 erfüllt und ein Dreieck beschreibt. Dann gilt die Ungleichung*

$$A(\gamma) \leq \frac{1}{12\sqrt{3}} L(\gamma)^2. \tag{1}$$

Hier gilt Gleichheit genau dann, wenn γ ein gleichseitiges Dreieck beschreibt.

Bemerkungen 5. (i) Beschreibt die Kurve γ_a ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge $a > 0$, so ist $L(\gamma_a) = 3a$. Da die Höhe $h = a \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} a$ beträgt, ist $A(\gamma_a) = \frac{a}{2} h = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$. Somit ist in der Tat

$$\frac{A(\gamma_a)}{L(\gamma_a)^2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} a^2}{9a^2} = \frac{1}{12\sqrt{3}}.$$

Der Quotient $\frac{A(\gamma_a)}{L(\gamma_a)^2} = \frac{1}{12\sqrt{3}}$ ist also insbesondere unabhängig von der Seitenlänge a!

Allgemeiner kann man sich auf analoge Weise überlegen, dass für zwei beliebige *ähnliche* Dreiecke γ und μ stets $\frac{A(\gamma)}{L(\gamma)^2} = \frac{A(\mu)}{L(\mu)^2}$ gilt.

(ii) Für die Konstanten in Satz 2 und 4 gilt $\frac{1}{4\pi} \approx 0.0796 > 0.0481 \approx \frac{1}{12\sqrt{3}}$. Dies ist konsistent mit der Tatsache, dass Satz 4 nur eine Teilmenge der in Satz 2 betrachteten Formen zulässt.

Die entscheidende Zutat für den Beweis von Satz 4 ist die folgende Konstruktion. Sei γ ein beliebiges Dreieck mit Eckpunkten P, Q und R. Dazu betrachten wir das *gleichschenklige* Dreieck γ' mit Eckpunkten P, Q und R' wie in Abbildung 2. (Das heißt, R' ist der eindeutig bestimmte Punkt auf der Parallelen g zu PQ durch R, der $\overline{R'P} = \overline{R'Q}$ erfüllt.)

Lemma 6. *Seien γ und γ' wie eben beschrieben. Dann gilt*

$$\frac{A(\gamma)}{L(\gamma)^2} \leq \frac{A(\gamma')}{L(\gamma')^2}.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $\gamma = \gamma'$ ist.

Beweis. Da $A(\gamma') = A(\gamma)$ wegen der Höhenformel für die Dreiecksfläche, müssen wir nur zeigen, dass $L(\gamma') \leq L(\gamma)$. Da sich die Strecke PQ nicht ändert, bedeutet dies gerade

$$\overline{R'P} + \overline{R'Q} \leq \overline{RP} + \overline{RQ}. \tag{2}$$

Sei Q' wie in Abbildung 2 der an der Parallelen zu PQ gespiegelte Bildpunkt von Q. Da R und R' auf der Spiegelungsachse liegen, gilt $\overline{RQ} = \overline{RQ'}$ und $\overline{R'Q} = \overline{R'Q'}$. Also ist (2) äquivalent zu

$$\overline{R'P} + \overline{R'Q'} \leq \overline{RP} + \overline{RQ'}. \tag{3}$$

Nun liegt aber der Punkt R' genau auf der Strecke PQ'. (Dies folgt beispielsweise durch Betrachtung passender Stufenwinkel bei P und R'.)

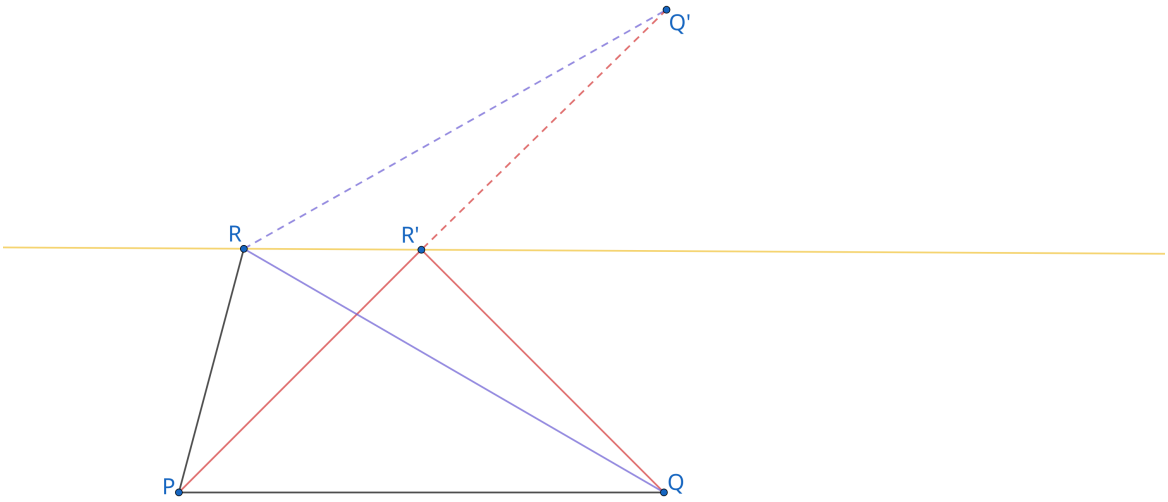


ABBILDUNG 2. Das gleichschenklige Dreieck (mit Ecke R') minimiert den Umfang unter allen Dreiecken mit gleicher Basis PQ und gleicher Höhe über dieser Basis.

Da die gerade Strecke PQ' der kürzeste Weg zwischen P und Q' ist, folgt

$$\overline{R'P} + \overline{R'Q'} = \overline{PQ'} \leq \overline{RP} + \overline{RQ'}.$$

Da der kürzeste Weg *eindeutig* ist, gilt Gleichheit hier *genau dann*, wenn $R = R'$, also $\gamma = \gamma'$. □

Mit Lemma 6 als wichtigem Hilfsmittel können wir nun Satz 4 beweisen.

Beweis von Satz 4. Sei γ ein beliebiges Dreieck mit Eckpunkten P, Q und R. Sei γ' wie oben das daraus gebildete gleichschenklige Dreieck mit Basis PQ. Nach Lemma 6 gilt

$$\frac{A(\gamma)}{L(\gamma)^2} \leq \frac{A(\gamma')}{L(\gamma')^2}. \tag{4}$$

Wir betrachten nun die Familie $(\gamma_h)_{h\in(0,\infty)}$ *aller* gleichschenkligen Dreiecke über der festen Seite PQ mit Höhe h. Schreiben wir kurz $\ell := \overline{PQ}$, so gilt

$$A(\gamma_h) = \frac{1}{2}\ell h, \qquad \text{sowie (nach Pythagoras)} \qquad L(\gamma_h) = \ell + 2\sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + h^2}.$$

Wir betrachten die stetige Funktion

$$q : (0,\infty) \to (0,\infty), \qquad q(h) = \frac{A(\gamma_h)}{L(\gamma_h)^2} = \frac{\frac{1}{2}\ell h}{\left(\ell + 2\sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + h^2}\right)^2}.$$

Wenn sich h gegen die Ränder des Definitionsintervalls $(0,\infty)$ von q bewegt, gilt

$$\lim_{h\to 0} q(h) = \frac{0}{(2\ell)^2} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{h\to\infty} q(h) = \frac{\frac{1}{2}\frac{\ell}{h}}{\left(\frac{\ell}{h} + \sqrt{\left(\frac{\ell}{2h}\right)^2 + 1}\right)^2} = \frac{0}{1} = 0.$$

Also muss q sein Maximum im Inneren von $(0,\infty)$ annehmen. Das bedeutet, es gibt $h_0 \in (0,\infty)$, sodass

$$q(h_0) \geq q(h) \quad \text{für alle } h \in (0,\infty). \tag{5}$$

Wir behaupten, dass das Dreieck γ_{h_0} gleichseitig sein muss. Falls nämlich die Länge s seiner beiden Schenkel ungleich der Basislänge ℓ wäre, so könnte man erneut Lemma 6 anwenden, wobei wir diesmal als Basis einen der Schenkel nehmen. Abbildung 3 stellt die Situation dar.

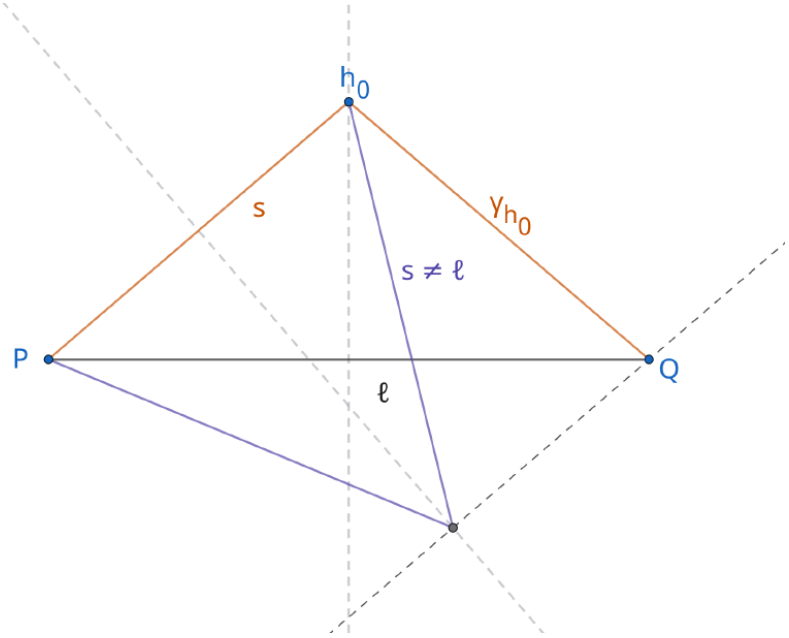


Abbildung 3. Lemma 6 wird ein zweites Mal mit einer anderen Seite als Basis angewendet.

Da wegen $s \neq \ell$ das Dreieck über *dieser* Basis nicht gleichschenklig ist, liefert Lemma 6 für das entstehende gleichschenklige Dreieck $\mu = (\gamma_{h_0})'$ die strikte Ungleichung

$$\frac{A(\mu)}{L(\mu)^2} > \frac{A(\gamma_{h_0})}{L(\gamma_{h_0})^2}. \tag{6}$$

Andererseits ist μ per Konstruktion ja wieder gleichschenklig und damit ähnlich zu einem der Dreiecke aus der Familie $(\gamma_h)_{h\in(0,\infty)}$. Aufgrund der Eigenschaft aus (5) folgt

$$\frac{A(\mu)}{L(\mu)^2} \leq \frac{A(\gamma_{h_0})}{L(\gamma_{h_0})^2}.$$

Dies ist ein Widerspruch zu (6)! Also muss die Annahme $s \neq \ell$ falsch gewesen sein. Damit ist γ_{h_0} ein gleichseitiges Dreieck.

Die Verkettung der Ungleichungen (4) und (5) liefert nun die gewünschte Ungleichung (1).

Falls Gleichheit in (1) gilt, dann muss γ bereits gleichseitig sein. Denn sonst könnte man dank Lemma 6 das Dreieck γ genau wie im Argument von eben durch ein Dreieck γ' ersetzen, sodass

$$\frac{1}{12\sqrt{3}} = \frac{A(\gamma)}{L(\gamma)^2} < \frac{A(\gamma')}{L(\gamma')^2}.$$

Da wegen (1) aber auch $\frac{A(\gamma')}{L(\gamma')^2} \leq \frac{1}{12\sqrt{3}}$ gilt, ist dies erneut ein Widerspruch. Ein Dreieck γ, das $A(\gamma) = \frac{1}{12\sqrt{3}} L(\gamma)^2$ erfüllt, muss also bereits gleichseitig sein. □

Übungsaufgabe A. Geben Sie einen *analytischen* Beweis von Lemma 6, indem Sie wie folgt vorgehen:

- Nach einer Rotation und Translation des Dreiecks PQR können wir annehmen, dass $P = (-p, 0)$, $Q = (p, 0)$ und $R = (r, h)$ für gewisse $p, h > 0$ und $r \in \mathbb{R}$. (Eine Skizze ist hilfreich.)
- Für festes $h > 0$ sei $R_t := (t, h)$. Zeigen Sie, dass die Funktion

  $$\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \ell(t) = \overline{R_t P} + \overline{R_t Q} = \sqrt{(t-p)^2 + h^2} + \sqrt{(t+p)^2 + h^2},$$

  im Punkt $t = 0$ ein striktes Minimum hat.
- Folgern Sie die Aussage von Lemma 6.

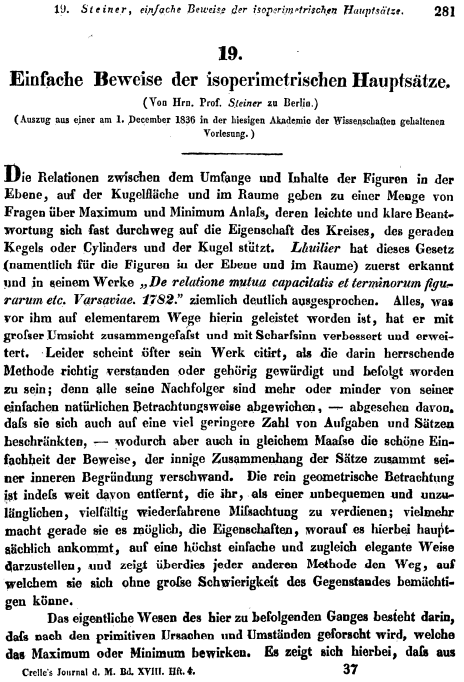
Übungsaufgabe B. Sei $PQRS$ ein Trapez mit parallelen Seiten PQ und RS. Seien R' und S' die eindeutig bestimmten Punkte auf der Geraden RS mit den Eigenschaften, dass $\overline{RS} = \overline{R'S'}$ und dass das Trapez $PQR'S'$ gleichschenklig ist (also $\overline{QR'} = \overline{PS'}$ gilt). Sei γ' die Randkurve von $PQR'S'$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{A(\gamma)}{L(\gamma)^2} \leq \frac{A(\gamma')}{L(\gamma')^2}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $\gamma = \gamma'$.

4. Der Beweis der isoperimetrischen Ungleichung

Wir beweisen nun Satz 2, unser Hauptresultat. Der folgende Beweis geht auf den Schweizer Mathematiker Jakob Steiner (1796–1863) zurück und wurde 1838 in der Fachzeitschrift *Journal für die reine und angewandte Mathematik* publiziert [3]. (Das Bild rechts zeigt die erste Seite des Originalartikels.) Diese Zeitschrift existiert heute noch immer, was sie zur ältesten mathematischen Fachzeitschrift der Welt macht: sie wird nächstes Jahr 200 Jahre alt!



19. *Steiner, einfache Beweise der isoperimetrischen Hauptsätze.* 281

19.

Einfache Beweise der isoperimetrischen Hauptsätze.

(Von Hrn. Prof. *Steiner* zu Berlin.)

(Auszug aus einer am 1. December 1836 in der hiesigen Akademie der Wissenschaften gehaltenen Vorlesung.)

Die Relationen zwischen dem Umfange und Inhalte der Figuren in der Ebene, auf der Kugelfläche und im Raume geben zu einer Menge von Fragen über Maximum und Minimum Anlafs, deren leichte und klare Beantwortung sich fast durchweg auf die Eigenschaft des Kreises, des geraden Kegels oder Cylinders und der Kugel stützt. *Lhuilier* hat dieses Gesetz (namentlich für die Figuren in der Ebene und im Raume) zuerst erkannt und in seinem Werke *„De relatione mutua capacitatis et terminorum figurarum etc. Varsaviae. 1782."* ziemlich deutlich ausgesprochen. Alles, was vor ihm auf elementarem Wege hierin geleistet worden ist, hat er mit grofser Umsicht zusammengefafst und mit Scharfsinn verbessert und erweitert. Leider scheint öfter sein Werk citirt, als die darin herrschende Methode richtig verstanden oder gehörig gewürdigt und befolgt worden zu sein; denn alle seine Nachfolger sind mehr oder minder von seiner einfachen natürlichen Betrachtungsweise abgewichen, — abgesehen davon, dafs sie sich auch auf eine viel geringere Zahl von Aufgaben und Sätzen beschränkten, — wodurch aber auch in gleichem Maafse die schöne Einfachheit der Beweise, der innige Zusammenhang der Sätze zusammt seiner inneren Begründung verschwand. Die rein geometrische Betrachtung ist indefs weit davon entfernt, die ihr, als einer unbequemen und unzulänglichen, vielfältig wiederfahrene Mifsachtung zu verdienen; vielmehr macht gerade sie es möglich, die Eigenschaften, worauf es hierbei hauptsächlich ankommt, auf eine höchst einfache und zugleich elegante Weise darzustellen, und zeigt überdies jeder anderen Methode den Weg, auf welchem sie sich ohne grofse Schwierigkeit des Gegenstandes bemächtigen könne.

Das eigentliche Wesen des hier zu befolgenden Ganges besteht darin, dafs nach den primitiven Ursachen und Umständen geforscht wird, welche das Maximum oder Minimum bewirken. Es zeigt sich hierbei, dafs aus

Crelle's Journal d. M. Bd. XVIII. Hft. 4. 37

Ähnlich wie im vorigen Abschnitt gibt es eine entscheidende geometrische Konstruktion, auf der der Beweis beruht. Diese liefert eine Lösung der folgenden interessanten Variante des isoperimetrischen Problems:

Wie viel Fläche kann man mit einem Faden der Länge L entlang eines (gerade verlaufenden) Meeresufers maximal einschließen?

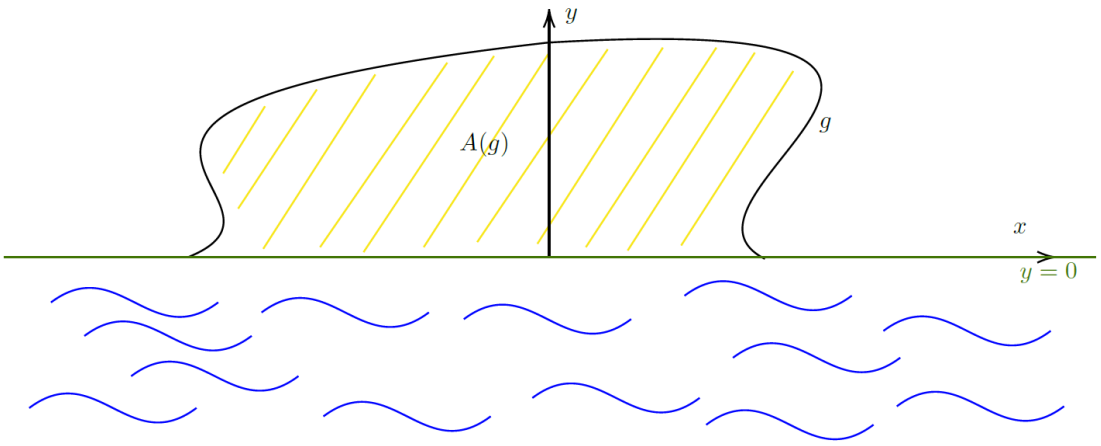


Abbildung 4. Eine *nicht geschlossene* Kurve g kann "am Ufer" dennoch ein Flächenstück begrenzen.

Wie Abbildung 4 verdeutlicht, betrachten wir für diese Variante des Problems also einfache, aber *nicht notwendigerweise geschlossene* Kurven $g : [0, 1] \to \mathbb{R} \times [0, \infty)$ mit Koordinaten

$g(t) = (x(t), y(t))$ mit $y(0) = y(1) = 0$. Wir bezeichnen weiterhin mit $L(g)$ die Länge der Kurve g. Die Fläche $A(g)$ sei nun definiert als die Fläche, die g *zusammen mit der Geraden* $y = 0$, der "Uferlinie", einschließt.

Satz 7 ("Dido am Strand")**.** *Sei g eine Kurve mit den eben beschriebenen Eigenschaften. Dann gilt*

$$A(g) \leq \frac{1}{2\pi} L(g)^2.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn g eine Halbkreislinie ist.

Es ist interessant zu bemerken, dass die Konstante $\frac{1}{2\pi}$ in Satz 7 um das Zweifache größer ist als die Konstante $\frac{1}{4\pi}$ in Satz 2. Königin Dido kann also "am Strand" mit dem gleichen Hautstreifen doppelt so viel Fläche einschließen wie "im Landesinneren"! Dies ist möglich, weil hier die Länge der Uferlinie, die einen Teil der Fläche berandet, nicht zu $L(g)$ gezählt wird.

Beweis. Klar ist, dass $A(g) = \frac{1}{2\pi} L(g)^2$, wenn g eine Halbkreislinie ist.

Sei nun g eine *optimale* Kurve, d.h. es gelte $\frac{A(g)}{L(g)^2} \geq \frac{A(h)}{L(h)^2}$ für alle zulässigen Kurven h. Wir müssen zeigen, dass g notwendigerweise eine Halbkreislinie sein muss.

Seien dazu P und Q die beiden Endpunkte von g und R ein beliebiger Punkt auf g. Sei $\sphericalangle PRQ$ der Winkel zwischen PR und QR bei R.

Als Kernstück des Beweises werden wir die folgende Behauptung zeigen:

$$\text{Falls } \sphericalangle PRQ \neq 90^\circ, \text{ dann gibt es eine Kurve } h, \text{ sodass } \frac{A(g)}{L(g)^2} < \frac{A(h)}{L(h)^2}. \tag{7}$$

Insbesondere gilt dann: Ist g eine optimale Kurve, dann muss wegen (7) für alle Punkte R auf g gelten, dass $\sphericalangle PRQ = 90^\circ$. Alle solchen Punkte bilden aber gerade den Thaleskreis über PQ, und somit eine Halbkreislinie.

Wir beweisen nun die Behauptung in zwei Schritten.

Schritt 1. Wir zeigen als Vorüberlegung, dass die Strecken PR und QR vollständig innerhalb der eingeschlossenen Fläche verlaufen müssen.

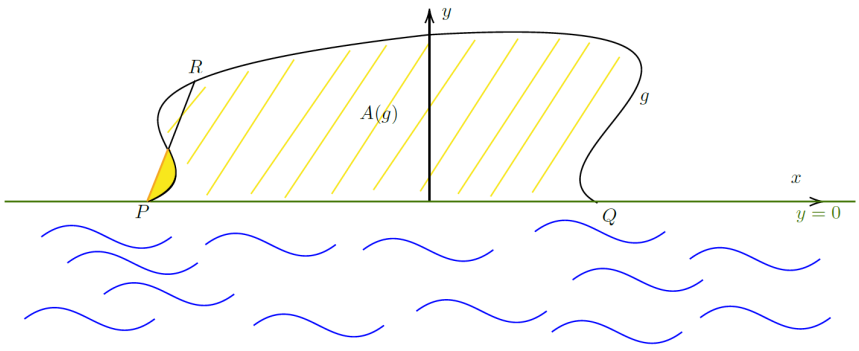


Abbildung 5. Die neue Kurve hat größere Fläche und kleinere Länge.

Wenn dies beispielsweise für PR nicht der Fall wäre, dann könnte eine zulässige Kurve $\tilde{g}$ erzeugen, indem man den innerhalb verlaufenden Teil durch die Gerade zwischen Eintritts- und Austrittspunkt ersetzt wie in Abbildung 5 dargestellt.

Die resultierende Kurve $\tilde{g}$ erfüllt $A(\tilde{g}) > A(g)$ und $L(\tilde{g}) < L(g)$. Damit wäre aber $\frac{A(\tilde{g})}{L(\tilde{g})^2} > \frac{A(g)}{L(g)^2}$, was der Optimalität von g widerspricht.

Schritt 2. Dank Schritt 1 lässt sich $A(g)$ wie in Abbildung 6 dargestellt als Summe dreier Flächeninhalte darstellen: nämlich der Flächenstücke C und D, sowie des Dreiecks PQR.

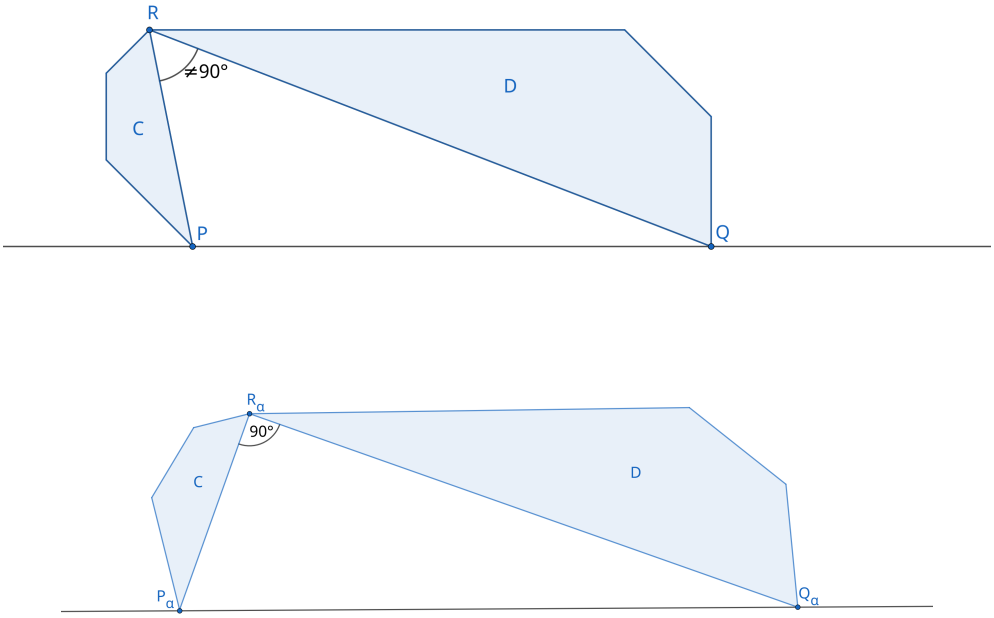


ABBILDUNG 6. Das Dreieck PQR wird am Punkt R zu einem flächengrößeren rechtwinkligen Dreieck "aufgebogen".

Nun kommt die entscheidende Idee: Wir denken uns nun die Stücke C und D in ihrer Form und Größe fest, aber den von ihnen bei R gebildeten Winkel $\alpha \in (0°, 180°)$ variabel, so als hätte die Figur ein "Scharnier" bei R. Wenn wir α variieren, erhalten wir also variierende Punkte P_α, Q_α und R_α.[1] Damit ändert sich insbesondere die Form und Fläche des Dreiecks $P_\alpha Q_\alpha R_\alpha$. Diese Fläche ist gegeben durch

$$A(P_\alpha Q_\alpha R_\alpha) = \frac{1}{2}\overline{P_\alpha R_\alpha}\,\overline{Q_\alpha R_\alpha}\sin\alpha = \frac{1}{2}\overline{PR}\,\overline{QR}\sin\alpha.$$

[1]Um eine zulässige Kurve g_α zu erhalten, drehen und schieben wir die entstehende Figur so, dass P_α und Q_α in jedem Fall weiterhin auf der "Uferlinie" liegen. Dies ist offenbar immer problemlos möglich.

Hier haben wir verwendet, dass mit C und D auch die Streckenlängen $\overline{P_\alpha R_\alpha}$ und $\overline{Q_\alpha R_\alpha}$ nicht von α abhängen. Für die neue Randkurve g_α gilt also $L(g_\alpha) = L(g)$ sowie

$$A(g_\alpha) = A(C) + A(D) + A(P_\alpha Q_\alpha R_\alpha) = A(C) + A(D) + \frac{1}{2}\overline{PR}\,\overline{QR}\sin\alpha.$$

Dies ist maximal (als Funktion von $\alpha \in (0°, 180°)$) genau dann, wenn $\alpha = 90°$.

Falls für einen Punkt R auf g der Winkel $\alpha = \sphericalangle PRQ$ nicht $90°$ beträgt, erhalten wir für $h := g_{90°}$ wie gewünscht $A(g) < A(h)$ und damit $\frac{A(g)}{L(g)^2} < \frac{A(h)}{L(h)^2}$. Damit ist die Behauptung (7) gezeigt, und der Beweis von Satz 7 ist vollständig. □

Zusammen mit der Information aus Satz 7 können wir nun Satz 2 beweisen. Wir betrachten nun also wieder geschlossene Kurven γ im Sinne der Definition 1.

Beweis von Satz 2. Klar ist, dass $A(\gamma) = \frac{1}{4\pi}L(\gamma)^2$, wenn γ eine Kreislinie ist.

Sei nun γ eine *optimale* Kurve, d.h. es gelte $\frac{A(\gamma)}{L(\gamma)^2} \geq \frac{A(\mu)}{L(\mu)^2}$ für alle zulässigen Kurven μ. Wir müssen zeigen, dass γ notwendigerweise eine Kreislinie sein muss.

Um dies auf Satz 7 zurückzuführen, gehen wir in drei Schritten vor.

Schritt 1: γ ist konvex. Wir überlegen uns zunächst, dass die von γ eingeschlossene Fläche *konvex* sein muss. Das bedeutet, dass für beliebige Punkt P und Q auf γ die Verbindungsstrecke PQ ganz innerhalb dieser Fläche verlaufen muss. Wäre dies nicht so, dann könnte man nämlich wie in Abbildung 7 links den Teil von γ zwischen P und Q ersetzen durch die Strecke PQ. Die resultierende Kurve μ erfüllt $A(\mu) > A(\gamma)$ und $L(\mu) < L(\gamma)$, also $\frac{A(\gamma)}{L(\gamma)^2} < \frac{A(\mu)}{L(\mu)^2}$. Dies widerspricht aber der Optimalität von γ.

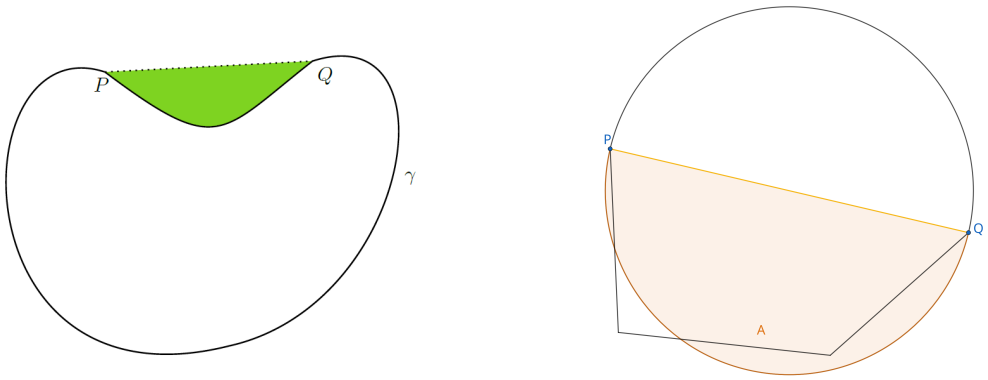


Abbildung 7. Die Konstruktionen aus Schritt 1 (links) und Schritt 2 (rechts).

Schritt 2. Seien P und Q zwei Punkte auf der Kurve γ. Wir zeigen: Teilt PQ die Länge $L(\gamma)$ in zwei gleich große Hälften, dann auch die Fläche $A(\gamma)$.[2]

[2]Um sinnvoll davon zu sprechen, dass PQ die eingeschlossene Fläche teilt, muss PQ innerhalb dieser Fläche verlaufen. Dies ist durch Schritt 1 gewährleistet.

Wenn dies nicht der Fall wäre, dann könnte man wie in Abbildung 7 rechts das kleinere Flachenstück durch die Spiegelung des größeren an PQ ersetzen. Die resultierende Kurve μ erfüllt $A(\mu) > A(\gamma)$ und $L(\mu) = L(\gamma)$, also $\frac{A(\gamma)}{L(\gamma)^2} < \frac{A(\mu)}{L(\mu)^2}$. Dies widerspricht erneut der Optimalität von γ.

Schritt 3. Nun können wir den Beweis mithilfe von Satz 7 abschließen. Wir wählen Punkte P und Q auf der Kurve γ so, dass sie die Kurve γ in zwei (nicht geschlossene) Teilkurven g_+ und g_- der Länge $L(g_+) = L(g_-) = \frac{1}{2}L(\gamma)$ teilen. Seien $A(g_+)$ und $A(g_-)$ die von $g_\pm$ mit der Gerade PQ eingeschlossenen Flächenstücke. Nach Schritt 2 gilt $A(g_+) = A(g_-) = \frac{1}{2}A(\gamma)$.

Da γ optimal für Satz 2 ist, müssen $g_\pm$ optimal für Satz 7 sein. (Sonst könnten wir wieder $g_\pm$ durch ihre optimalen Versionen gleicher Länge ersetzen, und die entstehende Kurve μ würde $\frac{A(\gamma)}{L(\gamma)^2} < \frac{A(\mu)}{L(\mu)^2}$ erfüllen.) Nach Satz 7 müssen $g_\pm$ Halbkreislinien über der Strecke PQ sein. Damit folgt, dass γ eine Kreislinie (mit Durchmesser PQ) ist, und wir sind fertig. □

Übungsaufgabe C. Leiten Sie, umgekehrt zum obigen Vorgehen, Satz 7 aus Satz 2 her.

Der Inhalt der folgenden beiden Abschnitte ist als Hintergrund- und Bonusmaterial zu verstehen. Er spielt insbesondere für die Vorbereitung auf die Creative Challenge keine unmittelbare Rolle.

5. Ausblick: Von Dido über Steiner in die Gegenwart

Große Mathematiker von früher und heute: Steiner, Dirichlet, Hurwitz und Figalli.

Steiners Beweis, den wir im letzten Abschnitt vorgestellt haben, hat eine zunächst unscheinbare, aber schwer zu behebende Lücke. In den oben blau hervorgehobenen Abschnitten setzen wir es als gegeben voraus, dass es für die in Satz 7 und Satz 2 behandelten Probleme jeweils optimale Kurven g bzw. γ überhaupt gibt – dies klingt zwar intuitiv richtig, ist aber von einem mathematisch rigorosen Standpunkt alles andere als klar!

Steiner wurde bereits von seinem Zeitgenossen Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) auf diese Lücke hingewiesen, weigerte sich aber zeitlebens weitgehend, seinen Beweis als nicht vollständig zu akzeptieren. Die Lücke in Steiners Beweis wurde erst 1882 von dem relativ unbekannten Mathematiker F. Edler geschlossen [1]. Zahlreiche weitere Beweise folgten. Zum Beispiel gab Adolf Hurwitz 1902 in [2] einen Beweis mit Methoden der Analysis, den wir im folgenden Abschnitt als Bonusinhalt wiedergeben.

Damit ist die Geschichte der isoperimetrischen Ungleichung jedoch noch lange nicht zu Ende. Auch für die heutige mathematische Forschung, einschließlich meiner eigenen, sind (mindestens) zwei eng mit ihr verbundene Fragen von großer Bedeutung:

- *Symmetrisierungsmethoden*: Gegeben eine Kurve γ, kann man daraus immer eine "symmetrischere" Kurve γ' erzeugen, für die $\frac{A(\gamma)}{L(\gamma)^2} \leq \frac{A(\gamma')}{L(\gamma')^2}$ gilt? Eine der einfachsten und effektivsten Symmetrisierungsmethoden, von der wir einen Spezialfall schon in Lemma 6 kennengelernt haben, geht auf Steiner selbst zurück. Kurioserweise behebt genau diese Methode, richtig eingesetzt, die Lücke in Steiners Beweis...
- *Stabilität*: Wenn für eine Kurve γ der Quotient $\frac{A(\gamma)}{L(\gamma)^2}$ fast gleich $\frac{1}{4\pi}$ ist, muss γ dann "fast" eine Kreislinie sein? Unter anderem für seinen Beitrag zur optimalen Lösung dieser Frage wurde der italienische Mathematiker Alessio Figalli 2018 mit der Fields-Medaille, dem "Nobelpreis der Mathematik", ausgezeichnet!

Im Fachvortrag bei der Main Math Challenge gibt es mehr über diese Themen zu hören.

6. Bonus: Ein analytischer Beweis der isoperimetrischen Ungleichung

Wie schon angekündigt skizzieren wir hier für Interessierte Hurwitz' Beweis [2] der isoperimetrischen Ungleichung aus Satz 2. Anders als der geometrische Beweis aus Abschnitt 4 ist dieser zweite Beweis *analytischer* Natur: er formuliert Satz 2 um als Ungleichung für gewisse Integrale der Koordinatenfunktionen von $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ und ihrer Ableitungen. So wird die geballte Power der Differential- und Integralrechnung für unser zunächst rein geometrisches Problem nutzbar gemacht.

Die Leserin und der Leser können hier die bemerkenswerte Tatsache würdigen, dass in der Mathematik sehr oft gänzlich unterschiedliche Wege zum selben Ziel führen.

6.1. Differenzierbare Kurven und Parametrisierung nach Bogenlänge.

In diesem Abschnitt ist es zweckmäßig, mit der folgenden, gegenüber Definition 1 leicht veränderten Definition einer Kurve zu arbeiten.

Definition 8. *Sei $a \in (0, \infty)$. Eine* einfache, geschlossene, differenzierbare Kurve *ist eine Abbildung*

$$\begin{aligned} \gamma : [0, a] &\to \mathbb{R}^2, \\ t &\mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

mit folgenden Eigenschaften:

(a) Die Koordinaten $x(t)$ und $y(t)$ der Kurve γ sind differenzierbare *Funktionen von $t \in [0, a]$.*

(b) $\gamma(0) = \gamma(a)$.

(c) Für alle $s \in [0, a)$ mit $s \neq t$ gilt $\gamma(s) \neq \gamma(t)$.

Wir sagen überdies, γ ist nach Bogenlänge parametrisiert*, falls gilt:*

$$1 = x'(t)^2 + y'(t)^2 \quad \text{für alle } t \in (0, a). \tag{8}$$

Bemerkung 9. Bedingung (8) scheint auf den ersten Blick eine sehr spezielle Forderung an die Kurve γ zu sein. Tatsächlich kann man aber zeigen, dass jede Kurve $\gamma : [0, a] \to \mathbb{R}^2$, die den Eigenschaften (a)–(c) aus Definition 8 genügt, *nach Bogenlänge parametrisiert werden kann.* Dies bedeutet, dass es eine Kurve $\tilde{\gamma} : [0, \tilde{a}] \to \mathbb{R}^2$ gibt, deren Bild $\tilde{\gamma}([0, \tilde{a}]) \subset \mathbb{R}^2$ mit $\gamma([0, a])$ übereinstimmt (insbesondere gilt also $L(\gamma) = L(\tilde{\gamma})$ und $A(\gamma) = A(\tilde{\gamma})$) und deren Koordinatenfunktionen $\tilde{x}(t)$ und $\tilde{y}(t)$ die Gleichheit (8) für alle $t \in (0, \tilde{a})$ erfüllen.

6.2. Ein analytischer Ausdruck für $L(\gamma)$ und $A(\gamma)$.

Für eine differenzierbare Kurve lässt sich $L(\gamma)$ folgendermaßen als Integral ausdrücken (hier ohne Beweis):

$$L(\gamma) = \int_0^a \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = \int_0^a |\gamma'(t)|\, dt. \tag{9}$$

Hier ist $|\gamma'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ die Länge des "Geschwindigkeitsvektors" $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) \in \mathbb{R}^2$.

Ist überdies γ nach Bogenlänge parametrisiert, dann lässt sich die Fläche $A(\gamma)$ als das folgende Integral ausdrücken (hier ebenfalls ohne Beweis):

$$A(\gamma) = \int_0^L x(t)y'(t)\,dt. \tag{10}$$

Aus (9) folgt, dass für eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $\gamma : [0, a] \to \mathbb{R}^2$ stets $L(\gamma) = a$ gilt. Wir schreiben deswegen im Folgenden $[0, L]$ für das Intervall, auf dem γ definiert ist.

6.3. **Wirtingers Ungleichung.** Die folgende Ungleichung für Funktionen einer Variablen ist zusammen mit der Formel aus (10) die Hauptzutat für unseren analytischen Beweis.

Proposition 10 (Wirtingers Ungleichung)**.** *Sei $L > 0$ und $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit auf $[0, L]$ beschränkter Ableitung f'. Sei $\bar{f} := \frac{1}{L}\int_0^L f(t)\,dt$ der Mittelwert von f. Dann gilt*

$$\int_0^L (f(t) - \bar{f})^2\,dt \le \frac{L^2}{4\pi^2}\int_0^L f'(t)^2\,dt. \tag{11}$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn es $c, d \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $f(t) = \bar{f} + c\sin(\frac{2\pi}{L}t) + d\cos(\frac{2\pi}{L}t)$.

Der Beweis beruht darauf, die Funktion f in ihre sogenannte *Fourier-Reihe*

$$f(t) = \bar{f} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(c_k \sin(\frac{2\pi}{L}kt) + d_k\cos(\frac{2\pi}{L}kt)\right)$$

für geeignete Koeffizienten c_k und d_k zu entwickeln. Wir geben hier keinen detaillierten Beweis von Proposition 10. Ein solcher ist z.B. in [4, S.11-12] zu finden.

6.4. **Beweis von Satz 2.** Mit diesen Hilfsmitteln können wir die isoperimetrische Ungleichung aus Satz 2 (für differenzierbare Kurven) beweisen:

Alternativer (analytischer) Beweis von Satz 2. Sei γ eine differenzierbare Kurve mit $L = L(\gamma)$. Wie in Bemerkung 9 dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ nach Bogenlänge parametrisiert ist. Da $y(0) = y(L)$, gilt $\int_0^L y'(t)\,dt = 0$ und somit

$$A(\gamma) = \int_0^L x(t)y'(t)\,dt = \int_0^L (x(t) - \bar{x})y'(t)\,dt.$$

Nach der zweiten binomischen Formel gilt für alle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$, dass

$$ab = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - (a-b)^2) \le \frac{1}{2}(a^2 + b^2). \tag{12}$$

Für beliebiges $\varepsilon > 0$ können wir auch a und b durch εa und $\frac{b}{\varepsilon}$ ersetzen und erhalten

$$ab = (\varepsilon a)\frac{b}{\varepsilon} \le \frac{1}{2}((\varepsilon a)^2 + \frac{b^2}{\varepsilon^2}) = \frac{\varepsilon^2}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2}b^2.$$

Wir wenden diese Ungleichung auf den obigen Integranden an, mit $a = x(t) - \bar{x}$, $b = y'(t)$ und einem noch zu bestimmenden ε. Dies liefert

$$A(\gamma) = \int_0^L (x(t) - \bar{x})y'(t)\,dt \le \frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^L (x(t) - \bar{x})^2\,dt + \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^L y'(t)^2\,dt.$$

Nun können wir auf den ersten Summanden Wirtingers Ungleichung (11) anwenden. Damit wird die obige Ungleichung zu

$$A(\gamma) \leq \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{L^2}{4\pi^2}\int_0^L x'(t)^2\,dt + \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_0^L y'(t)^2\,dt.$$

Wir wählen nun $\varepsilon^2 = \frac{2\pi}{L}$, sodass $\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{L^2}{4\pi^2} = \frac{1}{2\varepsilon^2} = \frac{L}{4\pi}$. Dies ergibt

$$A(\gamma) \leq \frac{L}{4\pi}\left(\int_0^L (x'(t)^2 + y'(t)^2)\,dt\right) = \frac{L}{4\pi}\int_0^L 1\,dt = \frac{1}{4\pi}L^2.$$

Hier haben wir benutzt, dass $x'(t)^2 + y'(t)^2 = 1$ für alle $t \in [0, L]$, da γ nach Bogenlänge parametrisiert ist.

Da wie schon bemerkt $L = L(\gamma)$ gilt, haben wir gezeigt, dass $A(\gamma) \leq \frac{1}{4\pi}L(\gamma)^2$. Dies ist genau die isoperimetrische Ungleichung aus Satz 2! □

Übungsaufgabe D. Sei $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ eine differenzierbare, nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Zeigen Sie anhand des vorstehenden Beweises und des Gleichheitsfalls in Wirtingers Ungleichung aus Proposition 10: Wenn Gleichheit $A(\gamma) = \frac{1}{4\pi}L^2$ gilt, dann gibt es $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, sodass $\gamma(t)$ eine Kreislinie um den Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ vom Radius $\frac{L}{2\pi}$ ist.

Literatur

[1] F. Edler. *Vervollständigung der Steiner'schen elementar-geometrischen Beweise für den Satz, dass der Kreis grösseren Flächeninhalt besitzt, als jede andere ebene Figur gleich grossen Umfanges.* Gött. N. (1882), 73–80.

[2] A. Hurwitz. *Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier.* Ann. de l'Éc. Norm. (3) 19 (1902), 357–408.

[3] J. Steiner. *Einfache Beweise der isoperimetrischen Hauptsätze.* Journal für die reine und angewandte Mathematik **18** (1838), 281–296.

[4] A. Trejbergs. *Inequalities that Imply the Isoperimetric Inequality.* `https://www.math.utah.edu/~treiberg/isoperim/isop.pdf`