

Main Math Challenge 2022
Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Mathematik



SPEED CHALLENGE

TEAMNAME:

Aufgabe 1.

Derek übt den Korbwurf für ein Basketballspiel. Innerhalb der ersten fünf Minuten schafft er es 6 Punkte zu erzielen. Wieviele Wege gibt es diese Punktzahl zu erreichen, wenn jeder Wurf entweder 1, 2 oder 3 Punkte gibt?

Für die Speed Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Sie sollen möglichst viele Aufgaben in dieser Zeit bearbeiten. Sie bekommen die nächste Aufgabe, wenn Sie die Lösung zu dieser Aufgabe abgeben. Sie können Aufgaben überspringen, indem Sie die Aufgabe ohne Lösung abgeben. Für bearbeitete Aufgaben können Sie bis zu 3 Punkte erreichen.

Main Math Challenge 2022
Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Mathematik



SPEED CHALLENGE

TEAMNAME:

Aufgabe 2.

Berechne $a^3 + b^3$, wenn $a + b = 5$ und $a \cdot b = 1$ gilt.

Für die Speed Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Sie sollen möglichst viele Aufgaben in dieser Zeit bearbeiten. Sie bekommen die nächste Aufgabe, wenn Sie die Lösung zu dieser Aufgabe abgeben. Sie können Aufgaben überspringen, indem Sie die Aufgabe ohne Lösung abgeben. Für bearbeitete Aufgaben können Sie bis zu 3 Punkte erreichen.

Main Math Challenge 2022
Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Mathematik



SPEED CHALLENGE

TEAMNAME:

Aufgabe 3.

Es sei $f(x) = \frac{2x}{3x+4}$. Wie muss $g(x)$ gewählt werden, damit $f(g(x)) = x$ gilt?

Für die Speed Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Sie sollen möglichst viele Aufgaben in dieser Zeit bearbeiten. Sie bekommen die nächste Aufgabe, wenn Sie die Lösung zu dieser Aufgabe abgeben. Sie können Aufgaben überspringen, indem Sie die Aufgabe ohne Lösung abgeben. Für bearbeitete Aufgaben können Sie bis zu 3 Punkte erreichen.

Main Math Challenge 2022
Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Mathematik



SPEED CHALLENGE

TEAMNAME:

Aufgabe 4.

Peter wohnt mit seinem Hund Charlie in einer Hütte abseits eines 10km entfernten Dorfes. Er möchte einkaufen gehen und nimmt dabei seinen Hund mit. Peter läuft mit einer konstanten Geschwindigkeit von 1km/h zum Dorf. Da Peter jede Woche mit Charlie einkaufen geht, kennt dieser bereits den Weg und rennt daher mit einer Geschwindigkeit von 4km/h zum Dorf voraus. Dort angekommen rennt er wieder zu Peter zurück und pendelt immer weiter hin und her, bis Peter schließlich am Dorf angekommen ist. Welche Strecke hat Charlie am Ende zurückgelegt?

Für die Speed Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Sie sollen möglichst viele Aufgaben in dieser Zeit bearbeiten. Sie bekommen die nächste Aufgabe, wenn Sie die Lösung zu dieser Aufgabe abgeben. Sie können Aufgaben überspringen, indem Sie die Aufgabe ohne Lösung abgeben. Für bearbeitete Aufgaben können Sie bis zu 3 Punkte erreichen.

Main Math Challenge 2022
Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Mathematik



SPEED CHALLENGE

TEAMNAME:

Aufgabe 5.

Anna, Bert und Clarissa bestimmen jeweils ohne sich untereinander abzusprechen zufällig eine ganze Zahl zwischen -5 und 5 (5 und -5 dürfen auch gewählt werden). Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Summe dieser drei Zahlen 0 ?

Für die Speed Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Sie sollen möglichst viele Aufgaben in dieser Zeit bearbeiten. Sie bekommen die nächste Aufgabe, wenn Sie die Lösung zu dieser Aufgabe abgeben. Sie können Aufgaben überspringen, indem Sie die Aufgabe ohne Lösung abgeben. Für bearbeitete Aufgaben können Sie bis zu 3 Punkte erreichen.

Main Math Challenge 2022
Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Mathematik



SPEED CHALLENGE

TEAMNAME:

Aufgabe 6.

Für welche Paare (a, b) reeller Zahlen gilt

$$a + b = a \cdot b = a^2 - b^2 ?$$

Für die Speed Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Sie sollen möglichst viele Aufgaben in dieser Zeit bearbeiten. Sie bekommen die nächste Aufgabe, wenn Sie die Lösung zu dieser Aufgabe abgeben. Sie können Aufgaben überspringen, indem Sie die Aufgabe ohne Lösung abgeben. Für bearbeitete Aufgaben können Sie bis zu 3 Punkte erreichen.

Main Math Challenge 2022
Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Mathematik



SPEED CHALLENGE

TEAMNAME:

Aufgabe 7.

Bestimmen Sie alle positiven reellen Zahlen, sodass $x^y = y^x$ gilt.

Für die Speed Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Sie sollen möglichst viele Aufgaben in dieser Zeit bearbeiten. Sie bekommen die nächste Aufgabe, wenn Sie die Lösung zu dieser Aufgabe abgeben. Sie können Aufgaben überspringen, indem Sie die Aufgabe ohne Lösung abgeben. Für bearbeitete Aufgaben können Sie bis zu 3 Punkte erreichen.

Main Math Challenge 2022
Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Mathematik



SPEED CHALLENGE

TEAMNAME:

Aufgabe 8.

Es seien x und y positive reelle Zahlen mit $x + y = 1$. Zeigen Sie

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 9.$$

Für die Speed Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Sie sollen möglichst viele Aufgaben in dieser Zeit bearbeiten. Sie bekommen die nächste Aufgabe, wenn Sie die Lösung zu dieser Aufgabe abgeben. Sie können Aufgaben überspringen, indem Sie die Aufgabe ohne Lösung abgeben. Für bearbeitete Aufgaben können Sie bis zu 3 Punkte erreichen.

Main Math Challenge 2022
Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Mathematik



SPEED CHALLENGE

TEAMNAME:

Aufgabe 9.

Finden Sie alle natürlichen Zahlen n , so dass $n^4 + 4$ eine Primzahl ist.

Hinweis: Können Sie einen Bezug zwischen $n^4 + 4$ und $(n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$ herstellen?

Für die Speed Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Sie sollen möglichst viele Aufgaben in dieser Zeit bearbeiten. Sie bekommen die nächste Aufgabe, wenn Sie die Lösung zu dieser Aufgabe abgeben. Sie können Aufgaben überspringen, indem Sie die Aufgabe ohne Lösung abgeben. Für bearbeitete Aufgaben können Sie bis zu 3 Punkte erreichen.

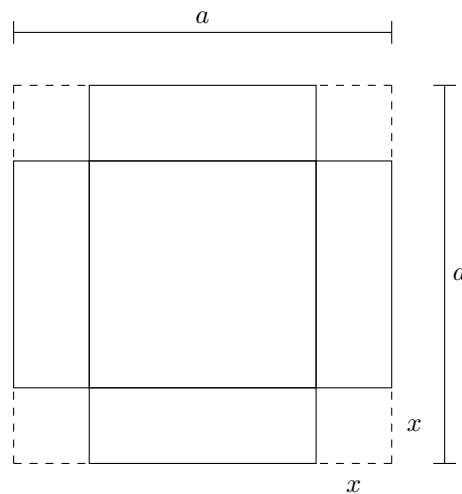


SPEED CHALLENGE

TEAMNAME:

Aufgabe 10.

Aus einem quadratischen Stück Pappe mit Seitenlänge a wird eine Kiste gebaut, indem jeweils in den vier Ecken eine x -mal- x große Fläche entfernt wird und anschließend die Seiten hochgeklappt werden.



Zeigen Sie, dass das Volumen der Box dann und nur dann maximiert wird, wenn die Grundfläche der Box gleich der Summe der vier Seitenflächen ist.

Für die Speed Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Sie sollen möglichst viele Aufgaben in dieser Zeit bearbeiten. Sie bekommen die nächste Aufgabe, wenn Sie die Lösung zu dieser Aufgabe abgeben. Sie können Aufgaben überspringen, indem Sie die Aufgabe ohne Lösung abgeben. Für bearbeitete Aufgaben können Sie bis zu 3 Punkte erreichen.

Main Math Challenge 2022
Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Mathematik



SPEED CHALLENGE

TEAMNAME:

Aufgabe 11.

Wenn das Produkt aller Zahlen von 1 bis 100 durch 2^n teilbar ist, wie groß darf die natürliche Zahl n maximal sein?

Für die Speed Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Sie sollen möglichst viele Aufgaben in dieser Zeit bearbeiten. Sie bekommen die nächste Aufgabe, wenn Sie die Lösung zu dieser Aufgabe abgeben. Sie können Aufgaben überspringen, indem Sie die Aufgabe ohne Lösung abgeben. Für bearbeitete Aufgaben können Sie bis zu 3 Punkte erreichen.

Main Math Challenge 2022
Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Mathematik



SPEED CHALLENGE

TEAMNAME:

Aufgabe 12.

Wieviele Möglichkeiten gibt es, ein 4×4 Schachbrett mit den Farben rot und blau so anzumalen, dass jede Zeile und jede Spalte genau 2 rote und 2 blaue Kästchen erhält?

Für die Speed Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Sie sollen möglichst viele Aufgaben in dieser Zeit bearbeiten. Sie bekommen die nächste Aufgabe, wenn Sie die Lösung zu dieser Aufgabe abgeben. Sie können Aufgaben überspringen, indem Sie die Aufgabe ohne Lösung abgeben. Für bearbeitete Aufgaben können Sie bis zu 3 Punkte erreichen.

Main Math Challenge 2022
Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Mathematik



SPEED CHALLENGE

TEAMNAME:

Aufgabe 13.

Wenn $a^x = b^y = c^z$ sowie $b^2 = ac$ gilt mit positiven reellen Zahlen a, b, c, x, y, z , wie lässt sich dann y schreiben?

a) $y = \frac{2xz}{x+z}$, b) $y = \frac{xz}{x+z}$, c) $y = \sqrt{2xz}$, d) $y = \sqrt{xz}$.

Für die Speed Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Sie sollen möglichst viele Aufgaben in dieser Zeit bearbeiten. Sie bekommen die nächste Aufgabe, wenn Sie die Lösung zu dieser Aufgabe abgeben. Sie können Aufgaben überspringen, indem Sie die Aufgabe ohne Lösung abgeben. Für bearbeitete Aufgaben können Sie bis zu 3 Punkte erreichen.

Main Math Challenge 2022
Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Mathematik



SPEED CHALLENGE

TEAMNAME:

Aufgabe 14.

Auf einen Kredit in Höhe von 2000,-EUR wird eine *monatliche* Zinsrate von 1% verlangt. Wenn der Kredit in 36 Monaten mit einer festen monatlichen Rate zurückgezahlt sein soll, wie hoch muss die monatliche Rate mindestens sein?

Hinweis: Es genügt eine geeignete Formel für die monatliche Rate zu bestimmen.

Für die Speed Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Sie sollen möglichst viele Aufgaben in dieser Zeit bearbeiten. Sie bekommen die nächste Aufgabe, wenn Sie die Lösung zu dieser Aufgabe abgeben. Sie können Aufgaben überspringen, indem Sie die Aufgabe ohne Lösung abgeben. Für bearbeitete Aufgaben können Sie bis zu 3 Punkte erreichen.

Main Math Challenge 2022
Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Mathematik



SPEED CHALLENGE

TEAMNAME:

Aufgabe 15.

Eine arithmetische Folge ist eine Folge von Zahlen $a_1, a_2, \dots$ mit der Eigenschaft, dass die Differenz zweier benachbarter Folgenglieder konstant ist, d.h., es existiert eine Zahl d , so dass

$$a_{i+1} = a_i + d \quad \text{für jede natürliche Zahl } i \text{ gilt.}$$

Zeigen Sie: Bilden $a_1, a_2, \dots$ eine unendliche arithmetische Folge, die eine Quadratzahl enthält, so enthält sie automatisch auch mindestens eine weitere Quadratzahlen.

Für die Speed Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Sie sollen möglichst viele Aufgaben in dieser Zeit bearbeiten. Sie bekommen die nächste Aufgabe, wenn Sie die Lösung zu dieser Aufgabe abgeben. Sie können Aufgaben überspringen, indem Sie die Aufgabe ohne Lösung abgeben. Für bearbeitete Aufgaben können Sie bis zu 3 Punkte erreichen.

Main Math Challenge 2022
Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Mathematik



SPEED CHALLENGE

TEAMNAME:

Aufgabe 16.

Wie viele sechstellige Zahlen der Form $abccba$ mit b ungerade gibt es, die durch 7 teilbar sind?

Für die Speed Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Sie sollen möglichst viele Aufgaben in dieser Zeit bearbeiten. Sie bekommen die nächste Aufgabe, wenn Sie die Lösung zu dieser Aufgabe abgeben. Sie können Aufgaben überspringen, indem Sie die Aufgabe ohne Lösung abgeben. Für bearbeitete Aufgaben können Sie bis zu 3 Punkte erreichen.

Main Math Challenge 2022
Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Mathematik



SPEED CHALLENGE

TEAMNAME:

Aufgabe 17.

Es gelten die folgenden Rechnungen:

$$99^1 = \mathbf{99}$$

$$99^2 = 9801$$

$$99^3 = 9702\mathbf{99}$$

$$99^4 = 96059601$$

$$99^5 = 95099004\mathbf{99}$$

Zeigen Sie, dass 99^n mit den Ziffern 99 endet, wenn n ungerade ist.

Für die Speed Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Sie sollen möglichst viele Aufgaben in dieser Zeit bearbeiten. Sie bekommen die nächste Aufgabe, wenn Sie die Lösung zu dieser Aufgabe abgeben. Sie können Aufgaben überspringen, indem Sie die Aufgabe ohne Lösung abgeben. Für bearbeitete Aufgaben können Sie bis zu 3 Punkte erreichen.

Main Math Challenge 2022
Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Mathematik



SPEED CHALLENGE

TEAMNAME:

Aufgabe 18.

Bestimmen Sie die Anzahl der Nullen mit denen die Zahl $100!$, die Fakultät von 100, endet.

Für die Speed Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Sie sollen möglichst viele Aufgaben in dieser Zeit bearbeiten. Sie bekommen die nächste Aufgabe, wenn Sie die Lösung zu dieser Aufgabe abgeben. Sie können Aufgaben überspringen, indem Sie die Aufgabe ohne Lösung abgeben. Für bearbeitete Aufgaben können Sie bis zu 3 Punkte erreichen.

Main Math Challenge 2022
Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Mathematik



SPEED CHALLENGE

TEAMNAME:

Aufgabe 19.

Eine Münze wird als fair eingestuft, wenn sie beim Werfen mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ Kopf und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ Zahl wirft. Klara besitzt $n + 1$ faire Münzen und Peter besitzt n faire Münzen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Klaras Münzen mehr Köpfe zeigen als Peters Münzen, wenn beide jede ihrer Münze genau einmal wirft.

Für die Speed Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Sie sollen möglichst viele Aufgaben in dieser Zeit bearbeiten. Sie bekommen die nächste Aufgabe, wenn Sie die Lösung zu dieser Aufgabe abgeben. Sie können Aufgaben überspringen, indem Sie die Aufgabe ohne Lösung abgeben. Für bearbeitete Aufgaben können Sie bis zu 3 Punkte erreichen.

Main Math Challenge 2022
Goethe-Universität Frankfurt am Main
Institut für Mathematik



SPEED CHALLENGE

TEAMNAME:

Aufgabe 20.

Eine Zahl hat steigende Ziffern, wenn die jede Nachfolgende Ziffer (gelesen von links nach rechts) nicht kleiner ist als die vorherige. Zum Beispiel: 45579.

Es gibt genau 219 Zahlen unterhalb von 1000, die steigende Ziffern haben.

Finden Sie eine Formel für die Anzahl der Zahlen mit steigenden Ziffern unterhalb von 1000000.

Für die Speed Challenge haben Sie 45 Minuten Zeit. Sie sollen möglichst viele Aufgaben in dieser Zeit bearbeiten. Sie bekommen die nächste Aufgabe, wenn Sie die Lösung zu dieser Aufgabe abgeben. Sie können Aufgaben überspringen, indem Sie die Aufgabe ohne Lösung abgeben. Für bearbeitete Aufgaben können Sie bis zu 3 Punkte erreichen.