

GEOMETRISCHE KOMBINATORIK UND EHRHART THEORIE

MAIN MATH CHALLENGE 2026

PROF. DR. RAMAN SANYAL

Kombinatorik ist das Teilgebiet der Mathematik, das sich mit diskreten (also u.a. endlichen) Strukturen beschäftigt. Genauer werden Fragen der Existenz, Erzeugung und Anzahl von diskreten Strukturen behandelt. Für ein konkretes Beispiel betrachten wir die folgende Frage.

Frage 1. Wie viele Möglichkeiten gibt es aus n wohl-unterscheidbaren Objekten zwei Objekte auszuwählen, ohne Berücksichtigung der Reihenfolge und ohne Zurücklegen?

Wenn die Objekte zum Beispiel 1, 2, 3, 4, 5 sind, dann gibt es die ungeordneten Paare

$$\{1, 2\}, \{3, 1\}, \{4, 1\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{4, 3\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}. \quad (\text{A})$$

Wir schreiben die ungeordneten Paare als Mengen, bei denen $\{3, 4\}$ und $\{4, 3\}$ die gleiche Menge darstellen.

Wir schreiben $\mathbb{N}_0$ für die Menge der nicht-negativen ganzen Zahlen. Für jede Menge mit $n \in \mathbb{N}_0$ vielen Objekten gibt es nur endlich viele ungeordnete Paare ohne Wiederholungen. Wie erzeugen wir diese Paare, wie zählen wir sie und wie bestimmen wir, für welche n es solche Paare gibt? Die Fragen bauen aufeinander auf. Wenn wir die möglichen ungeordneten Paare erzeugen können, dann können wir sie auch zählen und insbesondere feststellen, ob es welche gibt. Wir schreiben¹ $\binom{n}{2}$ für die Anzahl der ungeordneten Paare. Zum Beispiel gilt $\binom{0}{2} = \binom{1}{2} = 0$ und $\binom{5}{2} = 10$.

Es ist nicht so schwer, eine *geschlossene Form* für die Zählfunktion $\binom{n}{2}$ zu finden: Im ersten Schritt können wir eins von n Objekten wählen; im zweiten Schritt sind es noch $n - 1$. Da die Wahlen unabhängig voneinander sind, gibt das $n(n - 1)$ Möglichkeiten. Da wir nicht auf die Reihenfolge achten und das zweite Objekt auch als erstes hätten wählen können, müssen wir nochmal durch 2 teilen.

Beobachtung 1. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n - 1)}{2}.$$

Zur Sicherheit: $\binom{5}{2} = 10 = \frac{5 \cdot 4}{2}$.

Wir verändern nun die obige Fragestellung:

Frage 2. Wie viele Möglichkeiten gibt es aus n wohl-unterscheidbaren Objekten zwei Objekte auszuwählen, ohne Berücksichtigung der Reihenfolge, **aber** mit Zurücklegen?

Wir bezeichnen die Anzahl der Möglichkeiten mit $\binom{n}{2}$. Zum Beispiel $\binom{1}{2} = 1$ und $\binom{5}{2} = 15$; zu den obigen 10 Paaren von 1, 2, 3, 4, 5 kommen noch $\{1, 1\}, \{2, 2\}, \{3, 3\}, \{4, 4\}, \{5, 5\}$ hinzu. Also $\binom{5}{2} = 15$. Das Beispiel deutet auf eine Formel hin: zu den $\binom{n}{2}$ vielen ungeordneten Paaren kommen noch n Paare hinzu, in denen beide Objekte gleich sind.

Beobachtung 2. Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n - 1)}{2} + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Date: 10. September 2026.

¹Ja, das ist der *Binomialkoeffizient*.

Die geschlossenen Formen von $\binom{n}{2}$ und $\left(\!\!\binom{n}{2}\!\!\right)$ sind beides quadratische Polynome. Allgemeiner definieren wir für alle ganzen Zahlen $z \in \mathbb{Z}$

$$\binom{z}{2} := \frac{z(z-1)}{2} = \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}z \quad \text{und} \quad \left(\!\!\binom{z}{2}\!\!\right) := \frac{z(z+1)}{2} = \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}z$$

Wenn $z \geq 0$, dann können wir $\binom{z}{2}$ und $\left(\!\!\binom{z}{2}\!\!\right)$ im Sinne von Frage 1 und Frage 2 interpretieren. Aber wir sehen auch, dass auch für $z < 0$ sowohl $\binom{z}{2}$ als auch $\left(\!\!\binom{z}{2}\!\!\right)$ nicht-negative ganze Zahlen sind! Sind das wieder Zählfunktionen? Der folgende Satz gibt eine schöne Antwort.

Satz 1. Für jede ganze Zahl $n > 0$ gilt

$$\binom{-n}{2} = \left(\!\!\binom{n}{2}\!\!\right) \quad \text{und} \quad \left(\!\!\binom{-n}{2}\!\!\right) = \binom{n}{2}$$

Beweis. Wir rechnen nach

$$\binom{-n}{2} = \frac{(-n)(-n-1)}{2} = (-1)^2 \frac{n(n+1)}{2} = \left(\!\!\binom{n}{2}\!\!\right). \quad \square$$

Der Satz verbindet die Anzahl der ungeordneten Paare von $1, \dots, n$ ‘mit’ und ‘ohne’ Wiederholungen über ihre Zählfunktionen. So ein Resultat heißt **kombinatorischer Reziprozitätssatz**: Eine Zählfunktion kann auf natürliche Weise durch ein Polynom dargestellt werden und die Auswertung an negativen ganzzahligen Werten ist die Zählfunktion einer anderen Klasse von Objekten. Es gibt erstaunlich viele solcher Reziprozitäten in der Kombinatorik und viele von ihnen lassen sich geometrisch erklären, also mit Techniken der *geometrischen Kombinatorik*.

Der Beweis unseres ersten kombinatorischen Reziprozitätssatzes ist leicht nachzuvollziehen, aber unbefriedigend. Er erklärt nicht, *warum* dieser Zusammenhang gilt. Das machen wir im nächsten Kapitel, wo unser Ziel ist, aus diesem Beweis-durch-Manipulation eine geometrische Erklärung zu machen.

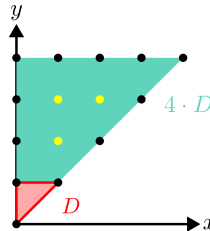
1. GITTERPUNKTE UND GITTERPOLYGONE

Da die Art der n Objekte egal ist, nehmen wir die ersten n positiven ganzen Zahlen $1, 2, \dots, n$. Die Idee ist nun, die ungeordneten Paare $\{a, b\}$ mit oder ohne Wiederholungen geometrisch zu deuten. Dafür nutzen wir die Tatsache, dass die ganzen Zahlen auf natürliche Weise geordnet sind. Wir können dann ein ungeordnetes Paar $\{a, b\}$ mit dem geordneten Paar (a, b) identifizieren mit der Konvention, dass das erste Element immer das kleinere der beiden ist, also $a \leq b$. Die ungeordneten Paare ohne Wiederholungen aus (A) schreiben wir also als

$$(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5).$$

Die fehlenden Paare mit Wiederholungen sind dann $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)$.

Sei $\mathbb{R}^2$ die Zeichenebene und $\mathbb{Z}^2$ die Menge aller **Gitterpunkte**, also Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit ganzzahligen Koordinaten. Betrachte das Dreieck D in der Ebene mit Ecken $(0, 0)$, $(0, 1)$ und $(1, 1)$. Für ganzzahliges $m > 0$ bezeichnen wir mit $m \cdot D$ die m -fache **Streckung** von D (mit Streckzentrum am Ursprung $(0, 0)$), also das Dreieck mit Ecken $(0, 0)$, $(0, m)$ und (m, m) . Hier ein Bild für $m = 4$



Man überzeuge sich, dass ein Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ in $m \cdot D$ genau dann liegt, wenn

$$0 \leq x \leq y \leq m$$

gilt. Das **Innere** D° von D sind die Punkte in D , die nicht auf einer der Randkanten liegen. Im Bild oben sind das genau die leicht roten Punkte. Für ein $m > 0$ gilt damit

$$m \cdot D^\circ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y < m\}.$$

Mit dem Aufbau können wir folgende geometrische Interpretation der Fragen 1 und 2 vornehmen:

Lemma 1. *Die ungeordneten Paare aus $1, 2, \dots, n$ mit Wiederholungen korrespondieren genau zu den Gitterpunkten in $(n-1) \cdot D$. Die geordneten Paare ohne Wiederholungen korrespondieren zu den Gitterpunkten in $(n+1) \cdot D^\circ$.*

Beweis. Ein Gitterpunkt $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ ist in $(n+1) \cdot D^\circ$ genau dann, wenn $0 < a < b < n+1$ gilt. Da a und b ganzzahlig sind, sind die erste und letzte Ungleichung erfüllt, wenn $1 \leq a$ und $b \leq n$ gilt, also genau wenn

$$1 \leq a < b \leq n.$$

Nach Konvention sind das genau die geordneten Paare zu Frage 1.

Ein Gitterpunkt $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ ist in $(n-1) \cdot D$ genau dann, wenn $0 \leq a \leq b \leq n-1$ gilt. Das ist genau dann, wenn für das Paar $(a+1, b+1)$ gilt

$$1 \leq a+1 \leq b+1 \leq n.$$

Damit sind die geordneten Paare $(a+1, b+1)$ genau die, die zu den Paaren aus Frage 2 korrespondieren. $\square$

Im Bild oben ist $4 \cdot D$ inklusive aller Gitterpunkte dargestellt. Die drei inneren (gelben) Gitterpunkte sind genau die Paare $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ mit $0 < a < b < 4$.

Für ganzzahliges $m > 0$ definieren wir $E_D(m)$ und $E_{D^\circ}(m)$ als die Anzahl der Gitterpunkte in $m \cdot D$ und in $m \cdot D^\circ$. Mit Lemma 1 bekommen wir dann

$$E_D(n-1) = \binom{n}{2} \quad \text{und} \quad E_{D^\circ}(n+1) = \binom{n}{2}.$$

Wir können aus diesen geometrischen Überlegungen eine schöne Tatsache gewinnen, die wir im Weiteren brauchen werden.

Proposition 1 (Der kleine Gauß²). *Für jede ganze Zahl $m \geq 0$ gilt*

$$1 + 2 + 3 + \dots + m = \frac{m(m+1)}{2}.$$

Beweis. Wir betrachten die Gitterpunkte in $(m-1) \cdot D$ oben im Bild und zählen sie nach ihrer y -Koordinate. Die Anzahl Gitterpunkte mit y -Koordinate gleich $i = 0, 1, \dots, m-1$ ist $i+1$. Wir folgern also

$$E_D(m-1) = 1 + 2 + 3 + \dots + m.$$

Andererseits haben wir gerade festgestellt, dass $E_D(m-1) = \binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2}$ gilt. $\square$

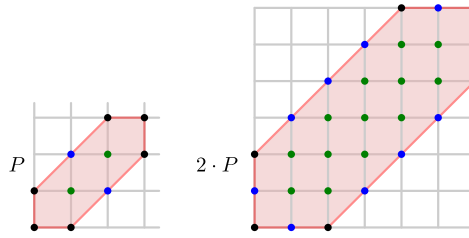
Wir können, was wir gemacht haben, nun aus geometrischer Sicht betrachten: Für jedes ganzzahlige $m > 0$ gilt:

- (1) Die Zählfunktion $E_D(m)$, die die Gitterpunkte in $m \cdot D$ zählt, ist gegeben durch das *quadratische Polynom* $E_D(m) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$ und
- (2) Die Anzahl der Gitterpunkte im Inneren von $m \cdot D$ ist $E_{D^\circ}(m) = E_D(-m)$.

Diese beiden Eigenschaften gelten für viel allgemeinere Figuren in der Ebene!

Ein **Polygon** (oder **Vieleck**) $P \subset \mathbb{R}^2$ ist eine von $k \geq 3$ Strecken begrenzte ebene Figur mit k Ecken. Wir nennen P ein **Gitterpolygon**, wenn alle Ecken von P Gitterpunkte sind. Zum Beispiel ist D ein Gitterpolygon. Wir werden im Weiteren immer davon ausgehen, dass unsere Polygone **konvex** sind, also dass jede Strecke, die zwei Punkte in P verbindet, vollständig in P liegt. Hier ist ein Gitterpolygon mit sechs Ecken:

²siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Gausssche_Summenformel.



Wir bezeichnen mit P° das **Innere** von P , also die Punkte in P , die nicht auf einer der Randkanten von P liegen. Für $m > 0$ definieren wir die **m -te Streckung** von P (mit Streckzentrum $(0,0)$) als

$$m \cdot P := \{(mx, my) : (x, y) \in P\}$$

und $m \cdot P^\circ$ entsprechend.

Die **Ehrhart Funktion** $E_K(m)$ einer Menge $K \subset \mathbb{R}^2$ zählt die Anzahl der Gitterpunkte in $m \cdot K$ für ganzzahlige $m > 0$:

$$E_K(m) := |m \cdot K \cap \mathbb{Z}^2|.$$

Wir gehen durchweg davon aus, dass $E_K(m) < \infty$ für alle $m > 0$ gilt. Für das Sechseck bekommen wir $E_P(1) = 10$ und $E_{P^\circ}(1) = 2$ und $E_P(2) = 29$ und $E_{P^\circ}(2) = 13$.

Hier ist unser zentrales Resultat.

Satz 2. Für jedes konvexe Gitterpolygon P gibt es Konstanten $\alpha_P, \beta_P, \gamma_P \in \mathbb{Q}$, die nur von P abhängen, so dass für alle ganzzahligen $m > 0$ gilt

$$E_P(m) = |m \cdot P \cap \mathbb{Z}^2| = \alpha_P m^2 + \beta_P m + \gamma_P.$$

Satz 2 ist eine tiefgreifende und nicht-triviale Aussage: Die Anzahl der Gitterpunkte in Streckungen eines konvexen Gitterpolygons wird durch ein Polynom vom Grad 2 kontrolliert. Das ist auch deshalb so überraschend, weil es erstmal keinen offensichtlichen Grund gibt, warum die Folge $E_P(1), E_P(2), E_P(3), \dots$ durch ein quadratisches Polynom beschrieben werden sollte!

Für das Sechseck bekommen wir

$$E_P(m) = 5m^2 + 4m + 1.$$

Wichtig zu bemerken ist hier, dass wir ausschließlich ganzzahlige $m > 0$ erlauben. Natürlich können wir die Definition der Ehrhart Funktion auf beliebige reelle Zahlen $t > 0$ fortsetzen, aber nur für ganzzahlige t stimmt E_P mit einem Polynom überein. Allerdings stellt sich raus, dass wir, wie im Fall des Gitterdreiecks D , die Werte der Polynome für negative Argumente interpretieren können. Für ganzzahliges z definieren wir

$$E_P(z) := \alpha_P z^2 + \beta_P z + \gamma_P.$$

Satz 3 (Ehrhart Reziprozität). Sei P ein konvexes Gitterpolygon. Dann gilt für alle ganzzahligen $m > 0$

$$E_P(-m) = \alpha_P(-m)^2 + \beta_P(-m) + \gamma_P = E_{P^\circ}(m).$$

Achtung: Wenn P ein Gitterpolygon ist, dann können wir $(-1) \cdot P = -P$ als die Spiegelung im Ursprung interpretieren. Es ist allerdings falsch, dass $E_P(-m) = E_{-P}(m)$ gilt. Überzeugen Sie sich, dass das schon für unser Gitterdreieck D von zuvor falsch ist!

Die Sätze 2 und 3 sind die Hauptaussagen der sogenannten **Ehrhart Theorie**. Entdeckt wurden diese Zusammenhänge (in beliebigen Dimensionen) von Eugène Ehrhart, der Zeit seines Lebens Mathematiklehrer an einem Gymnasium war³.

Übungsaufgabe 1. Für $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$ mit $a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2$ definiere ein **Gitterrechteck** als

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2\}.$$

Zeige, dass für alle ganzzahligen $m > 0$ die Ehrhart Funktion $E_R(m)$ mit einem quadratischen Polynom übereinstimmt und dass $E_R(-m) = E_{R^\circ}(m)$ gilt.

Der Beweis der beiden Sätze ist nicht ganz einfach und erfolgt in mehreren Schritten im Rest des Kapitels. Wir werden dabei aber einige interessante geometrische und kombinatorische Einsichten haben.

³https://de.wikipedia.org/wiki/Eugene_Ehrhart

1.1. Punkte, Segmente und Dreiecke. Bevor wir uns allgemeinen konvexen Gitterpolygonen zuwenden, betrachten wir erstmal einfachere Formen, genauer Punkte, Segmente und Dreiecke.

Gitterpunkte. Sei $V = \{p\}$ eine Teilmenge der Ebene, die nur aus einem einzelnen Gitterpunkt $p = (x, y) \in \mathbb{Z}^2$ besteht. Natürlich gilt $m \cdot V = \{mp = (mx, my)\}$ und da mp für ganzzahlige m immer ein Gitterpunkt ist, folgern wir, dass $E_V(m) = 1$ für alle ganzzahligen $m > 0$ gilt. Aus verschiedenen Gründen ist es sinnvoll, das (relativ) Innere eines Punktes als $V^\circ := \{p\}$ zu definieren. Damit gilt insbesondere $E_V(-m) = E_{V^\circ}(m)$ für alle $m > 0$.

Gittersegmente. Sei nun $S \subset \mathbb{R}^2$ eine Strecke mit Endpunkten $p, q \in \mathbb{Z}^2$, die wir ein **Gittersegment** nennen wollen. Das (relativ) Innere von S ist S ohne seine beiden Endpunkte, also $S^\circ := S \setminus \{p, q\}$.

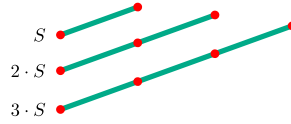
Proposition 2. Sei S ein Gittersegment und sei $r = |S \cap \mathbb{Z}^2|$ die Anzahl der Gitterpunkte in S . Dann gilt für alle ganzzahligen $m > 0$

$$E_S(m) = m(r - 1) + 1 \quad \text{und} \quad E_{S^\circ}(m) = m(r - 1) - 1.$$

Insbesondere gilt für alle $m > 0$

$$-E_S(-m) = E_{S^\circ}(m).$$

Beweis. Seien p, q die Endpunkte von S und $m > 0$ ganzzahlig. Dann ist $m \cdot S$ ein Gittersegment mit Endpunkten mp und mq . Machen wir uns ein Bild von $m \cdot S$



so sehen wir, dass $m \cdot S$ durch m viele Kopien von S zerlegt werden kann. Die Kopien unterscheiden sich von S nur durch eine Verschiebung um einen Gitterpunkt und enthalten somit jeweils r Gitterpunkte (inklusive ihrer Endpunkte).

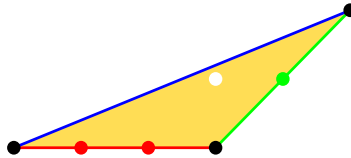
Wenn wir nun alle Gitterpunkte zählen und darauf achten, dass wir die roten Gitterpunkte im Inneren nicht doppelt zählen, dann kommen wir auf

$$E_S(m) = mr - (m - 1) = m(r - 1) + 1.$$

Die Anzahl der Gitterpunkte auf $m \cdot S^\circ$ ist genau zwei weniger als die Anzahl Gitterpunkte auf $m \cdot S$. Daraus folgt die zweite Aussage und durch Rechnen $-E_S(-m) = m(r - 1) - 1 = E_{S^\circ}(m)$ folgt die dritte Behauptung. $\square$

Zwei Bemerkungen noch. Erstmal sollten wir bemerken, dass hier nicht $E_S(-m) = E_{S^\circ}(m)$ gilt, sondern dass wir noch mit -1 multiplizieren müssen. Das kommt daher, dass Segmente, im Gegensatz zu Punkten und Polygonen, eine ungerade Dimension haben. Im Fachvortrag an der Main Math Challenge werden wir darauf noch genauer eingehen.

Dreiecke. Sei nun T ein Dreieck, dessen Ecken Gitterpunkte sind. Zum Beispiel kann es so aussehen:



Sei nun N_i die Anzahl der Gitterpunkte im Inneren von T und N_r, N_g, N_b die Anzahl der Gitterpunkte im Inneren(!) der roten, grünen und blauen Kanten. Im Beispiel $N_i = 1$, $N_r = 2$, $N_g = 1$ und $N_b = 0$. Insbesondere gilt

$$E_T(1) = |T \cap \mathbb{Z}^2| = N_i + N_r + N_g + N_b + 3.$$

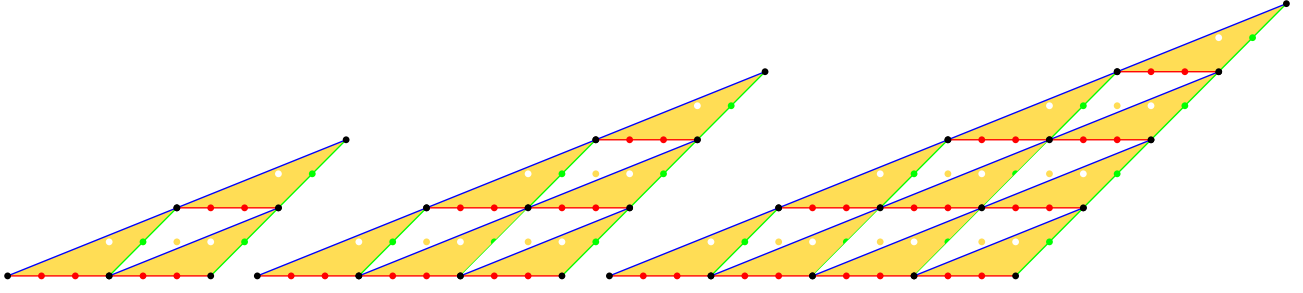
Proposition 3. Sei T ein Gitterdreieck, dann gilt für jedes ganzzahlige $m > 0$

$$E_T(m) = \frac{m(m+1)}{2} N_i + \frac{m(m-1)}{2} N_i + \frac{m(m+1)}{2} (N_r + N_g + N_b) + \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

und

$$E_T(-m) = E_{T^\circ}(m).$$

Beweis. Wie im Beweis zuvor machen wir uns ein Bild der Streckungen $m \cdot T$ für $m = 2, 3, 4, \dots$



Für $m > 1$ sehen wir, dass Kopien unseres ursprünglichen Dreiecks T so in $m \cdot T$ platziert werden können, so dass $m \cdot T$ durch gelbe und weiße Dreiecke *zerlegt* wird. Die gelben Dreiecke unterscheiden sich von dem ursprünglichen T nur um eine Gitterverschiebung. Die weißen Dreiecke sind wiederum Gitterverschiebungen von $-T$, der Spiegelung von T im Ursprung. Sowohl die gelben als auch die weißen Dreiecke haben somit jeweils N_i viele Gitterpunkte im Inneren. Jeder Gitterpunkt in $m \cdot T$ befindet sich also im Inneren eines gelben oder weißen Dreiecks, im Inneren einer farbigen Kante, oder ist ein schwarzer Eckpunkt eines der Dreiecke. Wir müssen also nur die Anzahlen der farbigen Dreiecke, Kanten und Eckpunkte richtig zählen.

Für die gelben Dreiecke lässt sich sehen, dass ihre Anzahl gegeben ist durch

$$1 + 2 + 3 + \dots + m = \frac{m(m+1)}{2},$$

wobei wir im letzten Schritt den kleinen Gauß genutzt haben. Die Anzahl der weißen Dreiecke ist dann $1 + 2 + \dots + (m-1) = \frac{m(m-1)}{2}$. Für die schwarzen Eckpunkte gilt ebenfalls

$$1 + 2 + 3 + \dots + m + (m+1) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}.$$

Jede Kante einer gegebenen Farbe (z.B. rot) liegt in genau einem gelben Dreieck und somit gibt es

$$\frac{m(m+1)}{2}(N_r + N_g + N_b)$$

viele Gitterpunkte, die im Inneren der farbigen Kanten liegen.

Wir können auf gleiche Weise die Gitterpunkte im Inneren von $m \cdot T$ zählen. Die Anzahl Gitterpunkte im Inneren von gelben und weißen Dreiecken bleibt gleich. Die Anzahl der Gitterpunkte im Inneren von Segmenten einer fixen Farbe ist nur noch $\frac{m(m-1)}{2}$ und die Anzahl der schwarzen Eckpunkte im Inneren von $m \cdot T$ ist ebenfalls nur noch $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$. Zusammen also

$$E_{T^\circ}(m) = \frac{m(m+1)}{2}N_i + \frac{m(m-1)}{2}N_i + \frac{m(m-1)}{2}(N_r + N_g + N_b) + \frac{(m-1)(m-2)}{2} = E_T(-m). \quad \square$$

Übungsaufgabe 2. Betrachte das Gitterdreieck T mit Ecken $(0,0)$, $(2,0)$ und $(0,1)$. Finde das beschreibende quadratische Polynom von $E_T(m)$ und überzeuge dich, dass die Reziprozität aus Satz 3 gilt.

1.2. Der allgemeine Fall. Hier beweisen wir nun Satz 2 und Satz 3 für allgemeine Gitterpolygone. Die Idee, die wir verfolgen, ist recht einfach: Wir möchten einen ähnlichen Beweis wie für Proposition 3 führen. Dabei reicht es aber zu zeigen, dass wir jedes Polygon in Dreiecke zerlegen können.

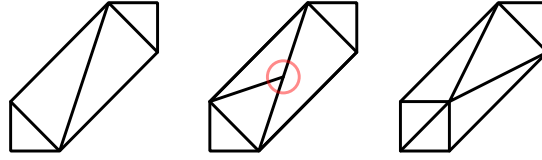
Unter einer **Triangulierung** eines Polygons $P \subset \mathbb{R}^2$ verstehen wir eine Menge von Dreiecken $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots, T_r\} \subseteq P$, so dass

- (1) P von $T_1, \dots, T_r$ überdeckt wird

$$P = T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_r$$

- (2) und für $1 \leq i < j \leq r$ gilt, dass $T_i \cap T_j$ entweder leer oder eine Ecke oder Kante sowohl von T_i als auch von T_j ist.

Das linke und das rechte Bild sind Triangulierungen, das mittlere Bild nicht, weil die zweite Bedingung nicht erfüllt ist.

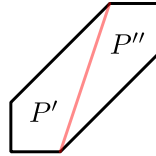


Satz 4. *Jedes konvexe Gitterpolygon hat eine Zerlegung in Gitterdreiecke.*

Beweis. Sei P ein Polygon mit $k \geq 3$ Ecken. Wir beweisen die Aussage mit vollständiger Induktion über die Anzahl der Ecken. Wenn $k = 3$ ist, dann ist P selber ein Dreieck und P trianguliert sich selber.

Wenn $k > 3$ ist, dann gibt es zwei Ecken u, v des Polygons, die nicht mit einer Kante verbunden sind. Das Segment mit Endpunkten u, v ist eine **Diagonale** und die Diagonale zerlegt das Polygon in zwei Polygone P' und P'' , die jeweils $< k$ viele Ecken haben (Warum?). Per Induktion haben sowohl P' als auch P'' Triangulierungen $P'_1, \dots, P'_s$ und $P''_1, \dots, P''_t$. Da nach Voraussetzung die Dreiecke in den jeweiligen Triangulierungen sich *gut* schneiden, ist eine Triangulierung von P durch $P'_1, \dots, P'_s, P''_1, \dots, P''_t$ gegeben. $\square$

Der Beweis ist konstruktiv und zeigt, wie man eine Triangulierung konstruiert: Wähle eine Diagonale, zerlege damit das Polygon P in zwei Polygone P', P'' mit echt weniger Ecken und wiederhole die Prozedur für P' und P'' :



Wie wir oben gesehen haben, kann ein Polygon noch viele weitere Triangulierungen haben. Die im Beweis konstruierte Triangulierung hat die Eigenschaft, dass sie keine neuen Ecken einführt. Das heißt insbesondere, dass, wenn P ein Gitterpolygon ist, alle Dreiecke in der Triangulierung automatisch Gitterdreiecke sind.

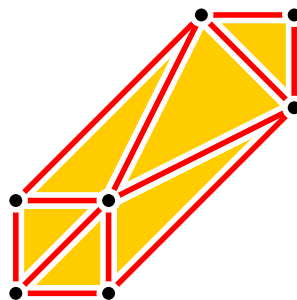
Eine wichtige Beobachtung ist, dass eine Triangulierung unter Streckung mit wächst: Für $m > 0$ ist $m \cdot \mathcal{T} = \{m \cdot T : T \in \mathcal{T}\}$ eine Triangulierung von $m \cdot P$.

Beweis von Satz 2 und 3. Sei P ein Gitterpolygon und sei $\mathcal{T}$ eine Triangulierung von P in Gitterdreiecke, die es nach Satz 4 gibt.

Sei $\mathcal{S}$ die Menge der Kanten der Dreiecke und $\mathcal{V}$ die Menge der Eckpunkte der Dreiecke. Dann können wir $m \cdot P$ schreiben als die *disjunkte Vereinigung*

$$m \cdot P = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} m \cdot T^\circ \uplus \bigcup_{S \in \mathcal{S}} m \cdot S^\circ \uplus \bigcup_{V \in \mathcal{V}} m \cdot V^\circ.$$

Disjunkte Vereinigung heißt, dass keine zwei Mengen in der Vereinigung Punkte gemeinsam haben. Zur Illustration:



Daraus folgt, dass

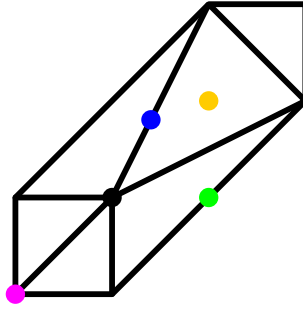
$$E_P(m) = \sum_{T \in \mathcal{T}} E_{T^\circ}(m) + \sum_{S \in \mathcal{S}} E_{S^\circ}(m) + \sum_{V \in \mathcal{V}} E_{V^\circ}(m). \quad (1.1)$$

In Abschnitt 1.1 haben wir gezeigt, dass für jeden Gitterpunkt, Gittersegment und Gitterdreieck $E_{V^\circ}(m)$, $E_{S^\circ}(m)$, $E_{T^\circ}(m)$ jeweils mit einem Polynom übereinstimmt, und die obige Summe ist also eine Summe von Polynomen und somit ein Polynom. Das beweist den ersten Satz.

Für den zweiten Satz betrachten wir

$$\begin{aligned} E_P(-m) &= \sum_{T \in \mathcal{T}} E_{T^\circ}(-m) + \sum_{S \in \mathcal{S}} E_{S^\circ}(-m) + \sum_{V \in \mathcal{V}} E_{V^\circ}(-m) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}} E_T(m) - \sum_{S \in \mathcal{S}} E_S(m) + \sum_{V \in \mathcal{V}} E_V(m) \end{aligned}$$

Nach den Reziprozitätsgesetzen für Dreiecke, Kanten und Ecken betrachten wir nun alle Gitterpunkte und wir müssen gucken, dass wir keine Punkte mehrfach zählen. Hier ist ein Bild, das die vier möglichen Fälle zeigt:



Da sich die Dreiecke höchstens im Rand schneiden, können wir sicher sein, dass die (gelben) Gitterpunkte im Inneren von Dreiecken nicht doppelt gezählt werden. Jeder (blaue) Gitterpunkt im Inneren einer *inneren* Kante liegt im Rand von zwei Dreiecken und wird von ihnen jeweils einmal gezählt. Allerdings gilt für Segmente S , dass $E_{S^\circ}(-m) = -E_S(m)$. Die (blauen) Gitterpunkte werden also einmal in der obigen Summe abgezogen und entsprechend nicht doppelt gezählt! Die (grünen) Gitterpunkte im Inneren von Randkanten liegen in genau einem Dreieck. In der obigen Summe werden sie also einmal durch ein Dreieck gezählt und einmal wieder durch eine Kante abgezogen.

Bleiben die (pinken und schwarzen) Eckpunkte von Dreiecken. Wenn ein (pinker) Eckpunkt im Rand liegt, dann ist er in h vielen Dreiecken und $h+1$ vielen Kanten enthalten. In der obigen Summe wird er also h mal gezählt, $h+1$ mal wieder abgezogen und, da er ein Eckpunkt ist, noch einmal addiert. Der Eckpunkt wird also insgesamt nicht gezählt. Das gleiche Argument geht auch für (schwarze) Eckpunkte im Inneren von P . Allerdings liegen sie in genauso vielen Dreiecken wie in Kanten. Sie werden damit genau einmal gezählt in der Summe.

Zusammen wird also jeder Gitterpunkt in $m \cdot P$, der im Inneren liegt, genau einmal gezählt und alle Gitterpunkte im Rand werden Null mal gezählt. Daraus folgt $E_P(-m) = E_{P^\circ}(m)$. $\square$